Teoria miary i całki
Lista 1

Zad 1. Wykazać, że rodzina zbiorów jest pierścieniem wtedy i tylko wtedy, gdy jest zamknięta na przekroje i różnice symetryczne.

Zad 2. Udowodnić, że jeżeli R jest pierścieniem zbiorów i zdefiniujemy na R operacje „mnożenia” i „dodawania” wzorami

$$A \odot B := A \cap B, \qquad A \oplus B := A \Delta B,$$

to R staje się pierścieniem w sensie algebraicznym. Jest to tak zwany *pierścień Boole'a.*

Zad 3. Jaką strukturę: półpierścień, pierścień, algebrę, σ-pierścień, σ-algebrę tworzą następujące rodziny podzbiorów zbioru X ($|A|$ oznacza tu moc zbioru A):

a) $S = \{A \subset X : |A| \leq 1\}$,

b) $S = \{A \subset X : |A| < \aleph_0\}$,

c) $S = \{A \subset X : |A| < \aleph_0 \text{ lub } |A'| < \aleph_0\}$,

d) $S = \{A \subset X : |A| \leq \aleph_0\}$,

e) $S = \{A \subset X : |A| \leq \aleph_0 \text{ lub } |A'| \leq \aleph_0\}$.

Zad 4. Czy rodzina

$$S = \{A \subset \mathbb{R}^2 : (x, y) \in A \Longrightarrow (-x, -y) \in A\}$$

stanowi σ-algebrę podzbiorów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$?

Zad 5. Wykazać, że przecięcie dowolnej rodziny σ-algebr (σ-pierścieni, algebr, pierścieni) jest σ-algebrą (σ-pierścieniem, algebrą, pierścieniem).

Zad 6. Pokazać, że przecięcie dwu półpierścieni nie musi być półpierścieniem.

Zad 7. Wyznaczyć σ-algebrę generowaną przez

a) jeden podzbiór X, *b*) dwa podzbiory X.

Zad 8. Wyznaczyć pierścień, σ-pierścień, algebrę oraz σ-algebrę generowaną przez

a) wszystkie jednoelementowe podzbiory X

b) wszystkie dwuelementowe podzbiory X

c) wszystkie podzbiory ustalonego podzbioru $F \subset X$.

Zad 9. Udowodnić, że σ-algebra zbiorów borelowskich przestrzeni topologicznej pokrywa się z σ-algebrą generowaną przez zbiory domknięte.

Zad 10. Pokazać, że na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ następujące zbiory są borelowskie

$$(a, b), \quad [a, b), \quad (a, b], \quad [a, b], \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Zad 11. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele podzbiorów przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ niebędących zbiorami borelowskimi.

Zad 12. Niech $\{f_n\}_{n \in N}$ będzie ciągiem ciągłych funkcji rzeczywistych na $\mathbb{R}$. Wykazać, że następujące zbiory są borelowskie oraz określić ich typ:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n \to \infty} f_n(x) = +\infty\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \text{ granica } \lim_{n \to \infty} f_n(x) \text{ istnieje}\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \text{ ciąg } \{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ dąży do liczby wymiernej}\}$$